Énigme N°6 – Les nombres parfaits – Réponse

L'autre nombre parfait inférieur à 30 est le nombre **28**. Il possède 6 diviseurs, qui sont : $1\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 7\ ;\ 14\ ;\ 28$.
La somme de ses diviseurs autres que 28 vaut : $1+2+4+7+14=28$, c'est-à-dire lui-même !

REMARQUE : Les nombres parfaits sont très rares et chercher les diviseurs d'un nombre puis vérifier s'il est parfait, peut être très long. Il existe une méthode permettant de les trouver plus rapidement. Cette méthode fut publiée par Euclide d'Alexandrie dans le IXème livre des « Éléments » entre -320 et -260 avant Jésus Christ.

LISTE DES 31 PREMIERS NOMBRES PREMIERS :
$(\mathcal{P})_{31}=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,101,103,107,109,113,127\}$

MÉTHODE (dès la 6ème) – Trouver un nombre parfait : Lorsque le résultat d'une suite de nombres doubles les uns des autres est un **nombre premier**, il suffit de multiplier ce **nombre premier** par le **dernier terme** de cette somme pour obtenir un nombre parfait !

EXEMPLES :
$1+\mathbf{2}=\mathbf{3}$ qui est premier donc $\mathbf{2}\times\mathbf{3}=\mathbf{6}$ est parfait.
$1+2+\mathbf{4}=\mathbf{7}$ qui est premier donc $\mathbf{4}\times\mathbf{7}=\mathbf{28}$ est parfait.
$1+2+4+8=15$ n'est pas premier.
$1+2+4+8+\mathbf{16}=\mathbf{31}$ qui est premier donc $\mathbf{16}\times\mathbf{31}=\mathbf{496}$ est parfait.
$1+2+4+8+16+32=63$ n'est pas premier.
$1+2+4+8+16+32+\mathbf{64}=\mathbf{127}$ qui est premier donc $\mathbf{64}\times\mathbf{127}=\mathbf{8128}$ est parfait.

Regardons quelques propriétés remarquables de ces nombres !

PROPRIÉTÉ 1 (dès la 6ème) : La somme numérique (la masse du nombre tant qu'il reste au moins deux chiffres) vaut toujours 1 pour un nombre parfait sauf le 6.

EXEMPLE 1 : Pour le nombre **28** :

$$2+8=10$$
$$1+0=1$$

EXEMPLE 2 : Pour le nombre **496** :

$$4 + 9 + 6 = 19$$
$$1 + 9 = 10$$
$$1 + 0 = 1$$

EXEMPLE 3 : Pour le nombre **8128** :

$$8 + 1 + 2 + 8 = 19$$
$$1 + 9 = 10$$
$$1 + 0 = 1$$

PROPRIÉTÉ 2 (dès la $4^{ème}$) : La somme des inverses des diviseurs d'un nombre parfait est toujours égale à 2.

EXEMPLE 1 : Pour le nombre **6** : Ses diviseurs sont : $\mathcal{D}_{\mathbf{6}} = \{1,2,3,6\}$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{6}{1 \times 6} + \frac{3}{2 \times 3} + \frac{2}{3 \times 2} + \frac{1}{6} = \frac{6 + 3 + 2 + 1}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

EXEMPLE 2 : Pour le nombre **28** : Ses diviseurs sont : $\mathcal{D}_{\mathbf{28}} = \{1,2,4,7,14,28\}$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = \frac{28 + 14 + 7 + 4 + 2 + 1}{28} = \frac{56}{28} = 2$$

REMARQUE : Pour calculer rapidement cette somme d'inverse il suffit de faire la division entre la somme des diviseurs d'un nombre parfait et son plus grand diviseur.

PROPRIÉTÉ 3 (dès la $3^{ème}$) : Tous les nombres parfaits, peuvent s'écrire comme une somme de cubes de nombres impairs consécutifs, sauf le **6** !

EXEMPLES :

$$\begin{array}{rl} \mathbf{6} & \text{Exception} \\ \mathbf{28} & = 1^3 + 3^3 \\ \mathbf{496} & = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 \\ \mathbf{8128} & = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3 \end{array}$$

Et voilà ! Tu en sais déjà beaucoup sur ces nombres. Pour terminer, tu trouveras une liste des 7 premiers nombres parfaits. Si tu veux, tu peux t'amuser à vérifier toutes ces propriétés et vérifier qu'elles sont vraies !

LISTE DES 7 PREMIERS NOMBRES PARFAITS :

$$(\mathcal{P}arfaits)_7 = (6, \mathbf{28}, 496, \mathbf{8128}, 33\,550\,336, \mathbf{8\,589\,869\,056}, 137\,438\,691\,328)$$